Egzamin poprawkowy — Funkcje Analityczne

23.02.2024

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)
Oblicz całki

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos(t))^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^4}\, dx.$$

Zadanie 2 (10 p.)
Rozważmy wielomian $f(z) = z^5 - 12z^2 + 14$.

(a) (5 p.) Ile pierwiastków wielomianu f (uwzględniając krotności) leży w dysku $D(0,1)$, ale ile w pierścieniu $\{z\colon 1 < |z| < 2\}$?

(b) (5 p.) Ile pierwiastków wielomianu f (uwzględniając krotności) ma dodatnią część rzeczywistą?

Zadanie 3 (15 p.)
Rozważmy funkcje

$$g(z) = \frac{z^2(e^z - e^{-z})}{z - \sin(z)}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^3}, \quad z \neq 0.$$

(a) Uzasadnij, że funkcję g można przedłużyć do funkcji holomorficznej $\widetilde{g}$ w otoczeniu zera.

(b) Niech $\widetilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ będzie rozwinięciem funkcji $\widetilde{g}$ w szereg potęgowy w otoczeniu $z = 0$. Wyznacz współczynniki c_0, c_1, c_2, c_3.
Podpowiedź: Wygodniej będzie użyć rozwinięć Taylora.

(c) Wyznacz część główną funkcji f wokół zera, rodzaj osobliwości w zerze oraz residuum w zerze.

Zadanie 4 (10 p.)
Rozważmy funkcję holomorficzną $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ daną wzorem $f(z) = 1 - z^2$. Czy istnieje holomorficzna gałąź pierwiastka z f, jeśli:

(a) $\Omega = \{z\colon |z| < 1\}$,

(b) $\Omega = \{z\colon |z| > 1\}$.